Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

- Integralsätze → die greensche Formel
- Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder revisited
- Potential eines konservativen Feldes finden

Integralsätze:

Schon gesehen:

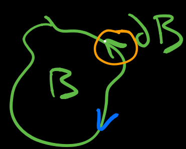
Satz (6.1): Ist K ein konservatives Skalarfeld mit einem Potential $K = \nabla p$ und γ eine bel. Kurve von a nach b, dann gilt:

$$\boxed{\int_\gamma K \, ds = \int_\gamma \nabla p \, ds = p(b) - p(a)}$$

→ in der Form: $$\boxed{\text{"} \int_{\partial\gamma} p = \int_\gamma dp \text{"}}$$

Hier $\partial\gamma$ sind die beiden Punkte a & b, $dp \mathrel{\hat{=}} \nabla p$
→ nur symbolisch
später: $dp = \nabla \times K$ o. $\nabla \cdot K$

Dualität: $\partial \quad \leftrightarrow \quad d$



Was ist die "richtige" Orientierung von ∂B für den Satz?

Randzyklen:

B sei ein kompakter Bereich B in der (x,y)-Ebene. Wir setzen voraus, das der Rand ∂B aus 1-Ketten besteht, also aus r glatten Bögen γ_i $i \in [1,r]$, welche so orientiert sind, dass B immer zur Linken von γ_i liegt.

Man nennt die von den γ_i gebildete Kette

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r = \partial B$$

den Randzyklus von B.

Der Randzyklus schliesst sich erfahrungsgemäss in einer oder mehrerer geschlossener Kurven.

$\Rightarrow$ $$\boxed{\partial(\partial B) = 0}$$ Eines der Urprinzipien der Geometrie

$\rightsquigarrow$ Der Rand des Randes einer Menge ist 0?

Die Greensche Formel:

(6.3) Es seien $K := \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ ein 2D-Vektorfeld auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit Randzyklus ∂B. Dann gilt:

$$\boxed{\underbrace{\int_{\partial B} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} ds}_{\text{Linienintegral}} = \int_{\partial B} P\,dx + Q\,dy = \underbrace{\int_B (Q_x - P_y)\,dS}_{\text{Flächenintegral}}}$$

"$\int_{\partial B} K\,ds = \int_B dK\,dS$" Hat die typische Form eines Integralsatzes!

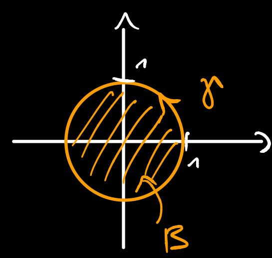
Voraussetzungen:

Das VF K muss auf ganz $B \subset \Omega$ definiert sein und der Bereich B muss glatt berandet sein $\Rightarrow$ Randzyklus ∂B ist eine 1-Kette!

$\rightarrow$ Beweis im Blatter ab S. 259

Beispiel: Berechne $\int_\gamma K\,ds$ für $K = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$ und

$\gamma :=$ Kreis mit Radius 1 um $(0,0)$ im GUS.



Direkt: $\int_\gamma K\,ds = \int_a^b K(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \dot\gamma(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t)+\sin(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) - \cancel{\sin(t)\cos(t)} + \cancel{\sin(t)\cos(t)}\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\,dt = -\left[\frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\pi}}$$

Mit dem Satz von Green:

$$= \underbrace{\int_B -1 \, dS}_{\text{Flächenintegral}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \left[-r\varphi\right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^1 -2\pi r \, dr = \left[-\pi r^2\right]_0^1 = \underline{\underline{-\pi}}$$

2D-Flächenformeln:

Möchten Flächen von Mengen über ihre Randzyklen berechnen.

Suchen uns dafür einfache Vektorfelder mit

$$\boxed{Q_x - P_y = 1}$$

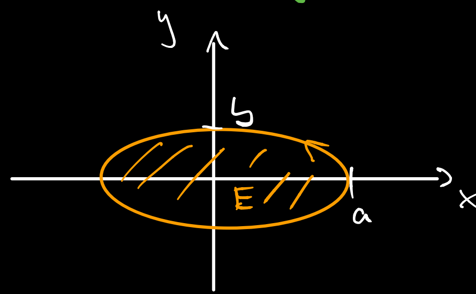
so z.B.: $K = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \end{bmatrix}$, $K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$.

Wir erhalten folglich

$$\boxed{\int_{\partial B} K \, ds = \int_B Q_x - P_y \, dS = \int_B 1 \, dS = \mu(B)}$$

Bem: <u>Jedes</u> Vektorfeld mit $Q_x - P_y = 1$ ist für diese Technik geeignet, jedoch möchte man sich die Rechnung natürlich möglichst einfach machen.

Beispiel: Flächeninhalt der durch $x = a\cos\theta$ & $y = b\sin\theta$ berandeten Ellipse:



Klassisch: (nur mit Fubini)

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

$\Rightarrow$ 1) $\underline{-a \le x \le a}$ 2) $\underline{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$

$$\hookrightarrow \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1 \, dy \, dx = \dots$$

Transformationssatz:

$$E = \left\{ (r,\varphi) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi) \;\middle|\; 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le r \le \underbrace{\frac{ab}{\sqrt{(b\cos\varphi)^2 + (a\sin\varphi)^2}}}_{(*)} \right\}$$

$$\hookrightarrow \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{(*)} r \, dr \, d\varphi = \dots$$

Bem: Das resultierende Integral ist mit beiden Methoden unschön und mühsam zu berechnen?

$$\gamma'(\theta) = \begin{bmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{bmatrix}$$

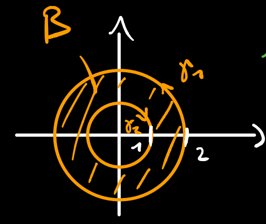
Satz von Green:

$$\int_{E} \underbrace{1}_{Q_x - P_y} \, dS = \int_{\partial E} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} ds = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -b\sin\theta \\ a\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{bmatrix} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left[ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta \right] d\theta = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = \underline{\underline{ab\pi}}$$

$\underline{\mu(B) = 3\pi}$

Beispiel: Berechne Fläche von



Bem: Parametrisiere $\partial B = \gamma_1 + \gamma_2$ so, dass B immer <u>links</u> von γ_1 & γ_2 liegt.

$$\Rightarrow \int_B 1 \, d\mu = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \end{bmatrix} d\varphi + \int_{2\pi}^{0} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} d\varphi = \underline{3\pi}$$

mit $\gamma_1(\varphi) = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{bmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\gamma_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$, $\varphi \in [2\pi, 0)$

Integrabilitätsbedingung für Vektorfelder:

<u>Klarstellung:</u> (Wortlaut der Theorie 9 geändert?)

Ist ein Feld konservativ, so gelten i) - iv) aus Theorie 9 auch auf nicht einfach zusammenhängenden Gebieten.

Ist das Gebiet jedoch nicht einfach zusammenhängend & es gilt $\mathrm{rot}(K) = 0$ (iv), so ist das Feld <u>nicht unbedingt</u> konserv.

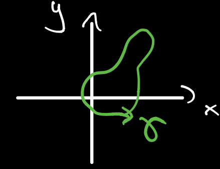
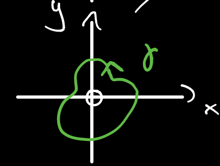
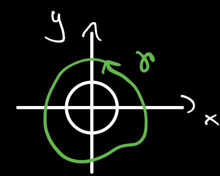
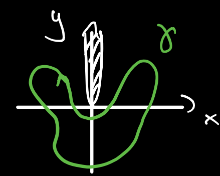
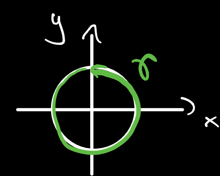
Einfache Zusammenhängigkeit:

Jede geschlossene Kurve $\gamma \in \Omega$ lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen.

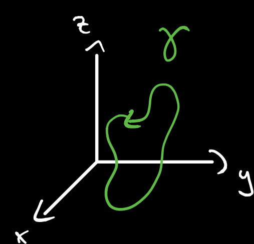
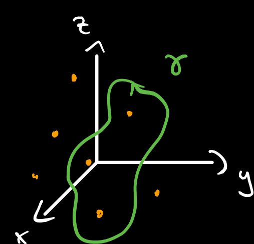
Beispiele:

einfach zusammenhängend?

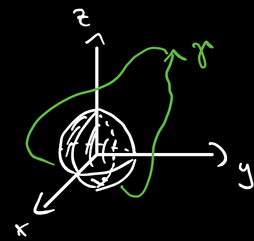
i) Ebene Gebiete

	Ja	Nein	Bild
$\mathbb{R}^2$	✓		
Kreisscheibe	✓		
$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$		×	
$\mathbb{R}^2 \setminus$ Kreisscheibe		×	
$\mathbb{R}^2 \setminus$ Halbstrahl	✓		
Kreisring		×	

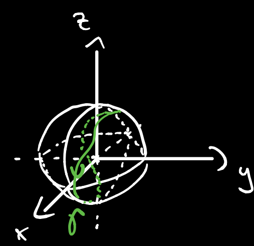
ii) Gebiete im Raum

	Ja	Nein	Bild
$\mathbb{R}^3$	✓		
$\mathbb{R}^3 \setminus$ endlich viele Punkte	✓		

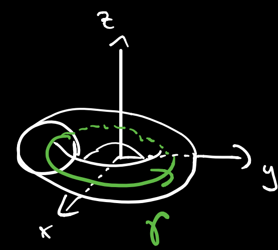
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Vollkugel ✓



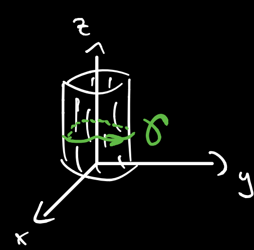
Kugelrinde ✓



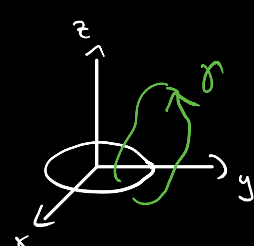
Inneres eines Volltorus ✗



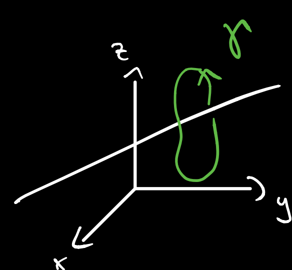
zylindrische Hülse ✗



$\mathbb{R}^3 \setminus$ Kreislinie ✗



$\mathbb{R}^3 \setminus$ Gerade ✗



Musteraufgabe Potential finden:

$$K = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y - y^5 \end{bmatrix}$$

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es sicher kein Potential!

Integrabilitätsbedingung: $Q_x - P_y \stackrel{?}{=} 0 = 2xy - 2xy$

$\Rightarrow$ K ist ein Potentialfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit:

$$K = \nabla p$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} p(x,y) = x^3 + xy^2 \qquad (i)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} p(x,y) = x^2y - y^5 \qquad (ii)$$

$$p(x,y) = \int (i)\, dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \boxed{C(y)}$$

Integrationsvariabel! Abhängig von allen anderen Variabeln

Kontrolle: $\frac{\partial}{\partial y} p(x,y) = x^2y + C'(y) \stackrel{!}{=} (ii)$

Falls Widerspruch $\rightarrow$ kein Potential

$$\Rightarrow C'(y) = -y^5$$

$$\int \rightarrow C(y) = -\frac{1}{6}y^6 + D$$

$$\Rightarrow K = \nabla p(x,y) \text{ mit } p(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{6}y^6 + D$$